π-Calculus

増山隆 *

2002 年 11 月 27 日

1 Syntax

N	$=$	$\{a, b, c, \ldots x, y, z \ldots\}$	(**Names**)
P	$::=$	0	(**Donothing**)
	$\mid$	$a(x).P$	(**input prefix**)
	$\mid$	$\bar{a}x.P$	(**output prefix**)
	$\mid$	$P \mid Q$	(**parallel composition**)
	$\mid$	$(\nu x)P$	(**restriction**)
	$\mid$	$!P$	(**replication**)

$\alpha.P$ の形をしたものは $prefix$ と呼ばれ、送信、受信を表す。

- $a(x).P$
  チャネル a から名前を読み込み、それを x に束縛して、 P を行う。$\lambda - Calculus$ の λ に似ている。
- $\bar{a}x.P$
  チャネル a に名前 x を送る。
- $P \mid Q$
  P 、 Q を並列に走らせる。
- $(\nu x)P$
  P 中の自由な x を P 中で局所化する。変数を局所化する点においては $\lambda - Calculus$ の λ に似ている。
- $!P$
  無限個の P を $\mid$ でつないだもの。再帰に対応する。

チャネルも送信されるものも " 名前 (Name)“ である。

* tak@yl.is.s.u-tokyo.ac.jp

2 Operational Semantics

$$\overline{\bar{a}x.P \mid a(y).Q \to P \mid Q[x/y]}$$

$$\frac{P \to P'}{P|Q \to P'|Q}\ \textbf{PAR}$$

$$\frac{(\nu x)P \to (\nu x)P'}{P \to P'}\ \textbf{RES}$$

$$\frac{P \equiv P',\ Q \equiv Q',\ P' \to Q'}{P \to Q}\ \textbf{S}$$

Operational Semantics はプロセスの状態遷移で表される。

代入 $P[y/x]$ は $\lambda - Calculus$ と同様に P 中の自由な x の出現を y に置き換える。P 中の自由変数の集合 $FN(P)$ は以下のように定義される。input prefix $a(x).P$ では P 中の自由な x の出現を束縛する一方で、チャネル名 a は自由である。 output prefix $\bar{a}x.P$ では、a 、 x ともに自由である。 restriction $(\nu x)P$ では P 中の自由な x の出現を束縛する。

$$\begin{aligned}
FN(0) &= \emptyset \\
FN(\bar{a}x.P) &= \{a, x\} \cup FN(P) \\
FN(a(x).P) &= \{a\} \cup FN(P) \\
FN((\nu x)P) &= FN(P) - \{x\} \\
FN(P \mid Q) &= FN(P) \cup FN(Q)
\end{aligned}$$

a と x はことなる名前であると仮定する。

$$\begin{aligned}
0[y/x] &= 0 \\
(\bar{a}x.P)[y/x] &= \bar{a}y.(P[y/x]) \\
(\bar{x}a.P)[y/x] &= \bar{y}a.(P[y/x]) \\
(a(x).P)[y/x] &= a(x).P \\
(x(a).P)[y/x] &= y(a).(P[y/x]) \\
((\nu x)P)[y/x] &= P \\
((\nu a)P)[y/x] &= ((\nu a)(P[y/x]) \\
(P \mid Q)[y/x] &= P[y/x] \mid Q[y/x]
\end{aligned}$$

STRUCT の規則に出てきた Structure congruence $P \equiv Q$ はプロセスの等価性を表すもので、次のように定義される。

- if Q is α-conversible from P then $P \equiv Q$
- $P \mid Q \equiv P \mid Q$
- $!P \equiv P|!P$
- Scope extension laws (related to restriction)

- $(\nu x)0 \equiv 0$
- $(\nu x)(P \mid Q) \equiv P \mid (\nu x)Q \quad if\ x \notin FN(P)$
- $0|P \equiv P$
- $(\nu x)(\nu y)P \equiv (\nu y)(\nu x)P$

3 例

3.1 単純な通信の例

$$\frac{}{a(x).\bar{c}x.0|\ \bar{a}b.0 \rightarrow (\bar{c}x.0)[b/x]\ |\ 0\ (=\bar{c}b.0)}\ \textbf{COM}$$

3.2 非決定的である例

$Q \stackrel{\text{def}}{=} \bar{a}x.0|\bar{a}y|az.P$ とする。Q には 2 通りの状態遷移がある。

$$\frac{\dfrac{}{\bar{a}x.0|az.P|\bar{a}y.0 \rightarrow P[x/z]|\bar{a}y}\ \textbf{COM}}{Q = \bar{a}x.0|\bar{a}y.0|az.P \rightarrow P[x/z]|\bar{a}y}\ \textbf{STRUCT}$$

$$\frac{\dfrac{}{\bar{a}y.0|az.P|\bar{a}x.0 \rightarrow P[y/z]|\bar{a}x}\ \textbf{COM}}{Q = \bar{a}x.0|\bar{a}y|az.P \rightarrow P[x/z]|\bar{a}y}\ \textbf{STRUCT}$$

3.3 選択

$$\begin{aligned} True(b) &= b(t,f).\bar{t} \\ False(b) &= b(t,f).\bar{f} \\ Test(b,P,Q) &= (\nu t)(\nu f)\bar{b}\langle t,f\rangle.(t.P \mid f.Q) \\ if(P,Q) &= (\nu b)(Test(b,P,Q) \mid True(b) \mid False(b)) \end{aligned}$$

3.4 private な接続の例

$A \stackrel{\text{def}}{=} c(x)\bar{x}s.P$, $B \stackrel{\text{def}}{=} ((\nu x)(\bar{c}x.x(v).Q))$, $C \stackrel{\text{def}}{=} x(u).R$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_4 \equiv \bar{y}s.P \mid y(v).Q[y/x] \rightarrow P \mid Q[y/x][s/v]}\ \textbf{COM}}{y(v).Q[y/x] \mid \bar{y}s.P(\stackrel{\text{def}}{=} P_4) \rightarrow P \mid Q[y/x][s/v]}\ \textbf{STRUCT}}{\bar{c}y.y(v).Q[y/x] \mid c(x).\bar{x}s.P \rightarrow P \mid Q[y/x][s/v]}\ \textbf{COM}}{c(x)\bar{x}s.P \mid \bar{c}(y).y(v).Q[y/x](\stackrel{\text{def}}{=} P_3) \rightarrow P \mid Q[y/x][s/v]}\ \textbf{STRUCT}}{(\nu y)(c(x)\bar{x}s.P \mid \bar{c}(y).y(v).Q[y/x]) \rightarrow (\nu y)(P \mid Q[y/x][s/v])}\ \textbf{REST}}{P_2 \equiv ((\nu y)(c(x)\bar{x}s.P \mid \bar{c}(y).y(v).Q[y/x])) \mid x(u).R \rightarrow (\nu y)(P \mid Q[y/x][s/v]) \mid x(u).R}\ \textbf{PAR}}{y \notin FV(Q)}\ \textbf{STRUCT}$$

$$\dfrac{\begin{array}{ll} P_1 \equiv & c(x)\bar{x}s.P \mid ((\nu y)(\bar{c}(y).y(v).Q[y/x])) \mid x(u).R(\stackrel{\text{def}}{=} P_2) \\ \rightarrow & ((\nu y)P \mid Q[y/x][s/v]) \mid x(u).R \end{array}}{\begin{array}{ll} A \mid B \mid C = & c(x)\bar{x}s.P \mid ((\nu x)(\bar{c}x.x(v).Q)) \mid x(u).R(\stackrel{\text{def}}{=} P_1) \\ \rightarrow & ((\nu y)P \mid Q[y/x][s/v]) \mid x(u).R \end{array}}\ \textbf{STRUCT}$$

A 、 B の間でチャネル c を介してプライベートなチャネル x が送受信される。このとき、C はチャネル x で名前を受信するけれども、A 、B の x とはスコープが異なるので、 C は A 、 B 間の通信に介入できない。

参考文献

[1] B. Pierce, Foundational Calculi for Programming Language, The Computer Science and Engineering Handbook, 1997

[2] J. Parrow, An Introduction to the π-Calculus