

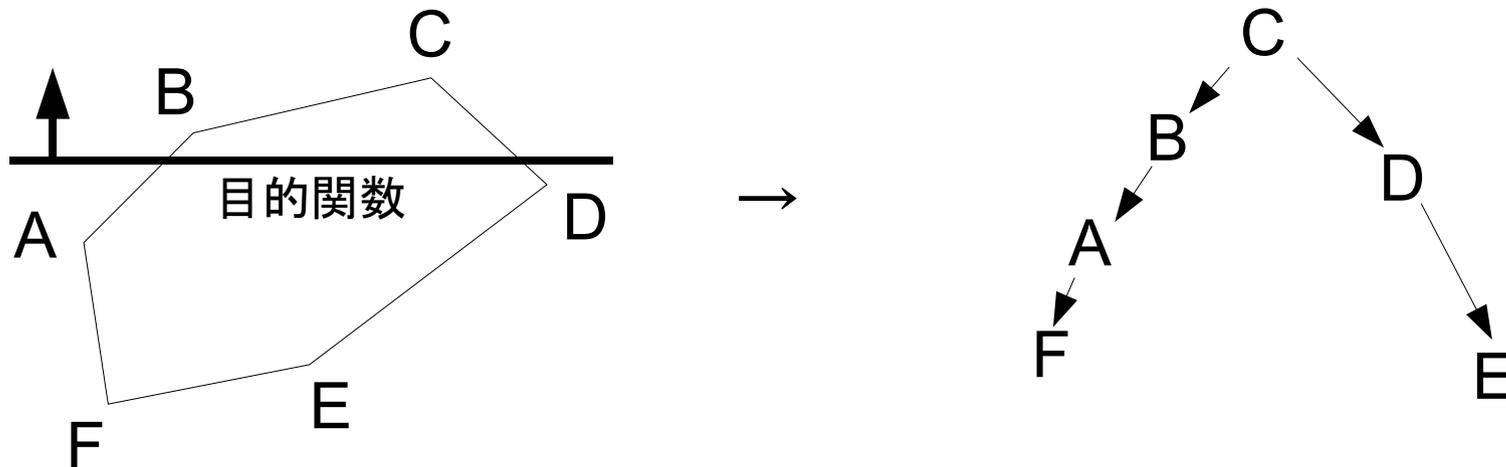
演習 3 (6/16)
31010 佐藤秀明

概要

- Reverse Search Vertex Enumeration
 - ・ 単体法の逆探索

Reverse Search(1)

- 単体法における pivoting
 - エッジを伝って頂点間を渡り歩く
 - 目的関数の値を増やすような方向に移動
- 目的関数を最大にするような頂点をルートとして、pivoting の操作を逆方向に探索する木を作成



Reverse Search(2)

- Dictionary の作成 (1)

M' を $(m * d)$ 行列として、 $M'x \leq b'$ で表現される領域を考える。

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_{d+1} \\ x_{d+2} \\ \dots \\ x_{d+m} \end{pmatrix} = \mathbf{b}' - M'x \geq \mathbf{0} \text{ とおき、この式を } x \text{ について解いて}$$

$x = \mathbf{b} - Mx'$ の形に置き換える。

この式の第0行に、目的関数として $x_0 = 0 - \sum_{i=1}^m x_{d+i}$ を付け加え、

$A = [I_{d+1} \quad M]$ とすれば、

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{x}' \geq \mathbf{0}) \text{ となる。}$$

Reverse Search(3)

- Dictionary の作成 (2)

B を、行列 A の中の $m+1$ 個の列を表す集合とする。

また、 N を、残りの d 個の列を表す集合とする。

前頁の式は $A_B x_B + A_N x_N = b$ と表すことができ、

これは $x_B = A_B^{-1} b$ 、 $x_N = 0$ でみたされる。さらに、

(i) $\{0, 1, \dots, d\} \subset B$

(ii) $x' \geq 0$

の両者が成り立っていれば、 x は元の領域上の頂点になっている。

- x の変数と x_0 は常に B に含まれるようにしておく。
- x' の変数のうち、 $(m-d)$ 個を選択して B に含ませる。

Reverse Search(4)

- Pivoting
 - A と b の方程式を行について掃き出し
 - B の中のある変数と N の中のある変数が 1 つずつ選ばれ、それらが交換される
 - B からは slack variable のみを選択するようにする
 - A_B は常に単位行列に保たれる

Reverse Search(5)

- 木の探索

- 1)現在の Dictionary (B, N) に対して可能な Pivoting 候補 (u, v) を見つける

- ・ u は slack variable から選ぶ

- 2)1) の Pivoting を行った結果 (B', N') について、以下の条件の充足を確認する

- ・ slack variable が 0 以上であるか

- ・ Bland's Rule に則って 1) の Pivoting を逆に行った結果がきちんと (B, N) に戻ってくるか

- 3)1)2) を深さ優先で繰り返す

Reverse Search(6)

- 例

$$H\text{表現} : \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{初期Dictionary} : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

これは頂点 $(5, 2)$ を表す。

Reverse Search(7)

- 例(続き)

x_3 と x_4 を取り替えると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

これは頂点 $(2,1)$ を表す。

いっぽう、 x_3 と x_5 を取り替えると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

これは頂点 $(3,4)$ を表す。

Reverse Search(8)

- 開いている図形は？
 - A_N に属する列ベクトルで、第 i 成分 ($d+1 \leq i \leq m$) がすべて 0 以下であるものは、その図形が開いている方向と逆の方向を示すベクトルになる。
 - 詳細は省略

Reverse Search(9)

- 長所

- ・ 異なる (B, N) は 1 度ずつしか出現しない
 - ・ 探索木が DAG ではなく必ず木になる

- 問題点

- ・ 同じ頂点を表す、異なる複数の (B, N) が出現
 - ・ ある頂点が d 本を超えるエッジの交点になっているとき
- ・ Lex-positive と Lex-minimum の概念を利用して解決

Reverse Search(10)

- Lex-positive

- 行列 $[b \ A]$ の各行ベクトルのうち、slack variable に関する行ベクトルすべてについて、その最初の 0 でない成分が正であるという性質
- Lex-positive 性を保つような pivoting のみを行うようにしても、すべてのノードはカバーできている
- 初期 dictionary は Lex-positive である。→探索木のルートが 1 つに定まる

Reverse Search(11)

- Lex-minimum

- 集合 B は、以下の 3 条件をみたす $r \in B$ 、 $s \in N$ の対が存在しないならば、かつそのときに限り lex-minimum である
 - $r > s$
 - $X_r = 0$
 - $(A_B^{-1}A_s)_r \neq 0$
- 同じ頂点を表す (B, N) の間に辞書式順序を設定する
- Lex-positive な変換のみを行い、かつ (B, N) が Lex-minimum であるときだけ解答として頂点を出力するようにすれば、同一頂点の複数回出力を避けられる

References

- David Avis and Komei Fukuda, “A Pivoting Algorithm for Convex Hulls and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra”, *Discrete and Computational Geometry*, vol.8, pp.295-313, 1992
- David Avis, “lrs: A Revised Implementation of the Reverse Search Vertex Enumeration Algorithm”, 1999,
<http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/doc/avis/Av98a.ps>