演習3 (6/2)
31010 佐藤秀明

概要

- 本演習のテーマ
  - 凸包計算アルゴリズム
- 基本的なアルゴリズム
  - Fourier-Motzkin Elimination
- これからの目標

本演習のテーマ

- 凸包計算
  - 連立不等式による表現 <---> 頂点集合による表現
  - 線形計画などに関連する重要な問題
  - 比較的効率のよいアルゴリズムについて理解

V表現

- 凸包…任意の集合を含む最小の凸集合

$$conv(P)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d : \boldsymbol{y}=\sum_i \lambda_i \boldsymbol{x_i}, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$$

  – 閉じている
- 錘包…任意のベクトルの非負係数による線形結合

$$cone(P)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d : \boldsymbol{y}=\sum_i \lambda_i \boldsymbol{x_i}, \lambda_i \geq 0\}$$

  – 原点を含み、開いている
- 多面集合…凸包と錘包のベクトル和
- 多面集合のV表現は、凸包を構成するベクトル集合と錘包を構成するベクトル集合の2つで構成される。

H表現

$$P(A, \boldsymbol{z}) = \{ \boldsymbol{y} \in \mathrm{IR}^d : A\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z} \}$$

- 複数の1次不等式の連立で表現される。
- 全不等式の共通部分は多面集合になる。

Fourier-Motzkinの消去法

- 多面集合PのV表現･H表現について、それぞれ一方から他方を求めることが可能。
- 詳しい解説は
  - G.M.ツィーグラー、凸多面体の科学(シュプリンガー･フェアラーク東京)

V表現からH表現への変換(1)

1. V-多面集合Pから、それより次元の高いH-多面集合P´を作成する

   ・ V-多面集合P …

$$conv(V)+cone(Y)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d : \exists \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{n'} : \boldsymbol{x}=V\boldsymbol{t}+Y\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}\geq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0}, \sum_i t_i=1\}$$

   ・ H-多面集合P´ … $\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{d+n+n'} : \boldsymbol{x}=V\boldsymbol{t}+Y\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}\geq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0}, \sum_i t_i=1\right\}$

2. H-多面集合P´を、1.で追加した新たな次元軸の方向へ繰り返し射影することによって、元の低い次元に戻す

3. 2.で得られた結果はPのH-表現になっている

V表現からH表現への変換(2)

- 例:(1, 1), (4, 2), (3, 4), (2, 3)を頂点とする平面上の四角形

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$$

$$t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$$

↓ t_1、t_2、t_3を消去、P′を構成

$$2x_1 + x_2 + 3t_4 \leq 10 \quad \cdots(1)$$

$$x_1 - 3x_2 + 5t_4 \leq -2 \quad \cdots(2)$$

$$-3x_1 + 2x_2 - t_4 \leq -1 \quad \cdots(3)$$

$$-t_4 \leq 0 \quad \cdots(4)$$

V表現からH表現への変換(3)

- 例:(続き)
  - t_4の係数は、(1)(2)が正、(3)(4)が負になっている。
  - x_1、x_2を固定したときに、それに対応するt_4の値が存在するならば、t_4方向への射影後(x_1、x_2)は解空間に含まれる。
  - t_4の係数が一方が正で他方が負になるような、すべての2式の組み合わせについて、t_4を消去して新たな不等式を作る。--> t_4の値が存在する条件

$$(1)(3)\text{から}\quad -x_1+x_2\leq 1$$
$$(1)(4)\text{から}\quad -2x_1+x_2\leq 10$$
$$(2)(3)\text{から}\quad -2x_1+x_2\leq -1$$
$$(2)(4)\text{から}\quad -x_1-3x_2\leq -2$$

V表現からH表現への変換(4)

- 以上の方法は、凸包に限らず多面集合一般について適用できる。
  - $t_1+t_2+t_3+t_4=1$のような係数の制約を受けないベクトルの項が増えるだけ

H表現からV表現への変換(1)

1. H-多面集合Pから、それより次元の高いV-多面集合P´を作成する
   - H-多面集合P　…　$P(A, \boldsymbol{z}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z}\}$
   - V-多面集合P´　…　$cone(P) = \{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : A\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{w}\}$
2. 以下の空間を考える

$$H = \{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m} : \boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}\}$$

4. V-多面集合P´を、2.のHとの共通部分を1次元ずつ繰り返しとることによって、元の低い次元に戻す
5. 3.で得られた結果はPのV-表現になっている

H表現からV表現への変換(2)

- 前頁3.の詳細について
  - V-多面集合P´が凸包または錘包の場合
    - 1)P´のV-表現を構成する各ベクトルを、その終点がHより上にあるものAと下にあるものBとに分類する。
    - 2)一方がAで他方がBであるようなすべてのベクトルの対について、2者の内分点でH上に存在するようなものを新たなベクトルとしてとる。
  - V-多面集合P´が凸包と錘包のベクトル和の場合は少々複雑

Fourier-Motzkinの問題点

- エレメントの総数が爆発
  - 一回の射影(または共通部分の計算)につき、不等式(または ベクトル)の数が最悪で(n^2)/4個に増える
- 本当は必要のないエレメントが出現する
  - H-表現における、解空間決定に関与しない不等式
  - V-表現における、ベクトルの一次従属

これからの目標

- Fourier-Motzkinに比べて効率のよい凸包計算アルゴリズムについて理解する
  - Double Description Method
    - Komei Fukuda and Alain Prodon, “Double Description Method Revisited”, 1996
    - http://www.cs.mcgill.ca/~fukuda/download/paper/ddrev960315.ps.gz
  - Reverse Search Vertex Enumeration
    - David Avis, “lrs: A Revised Implementation of the Reverse Search Vertex Enumeration”, 1998
    - http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/doc/avis/Av98a.ps
  - 上記いずれか。余裕があれば両方。